Untersuchungen zum Thema Tracking Error

J. Fulmek

24. August 2003

1 Einleitung

Im Folgenden werden folgende Punkte untersucht:

1. verschiedene in der Literatur übliche Definitionen des Tracking Errors und ihre Beziehungen zueinander,

2. für die Praxis sinnvolle Ertrags- bzw. Risikomaße, die aus den historischen Zeitreihen des Fondsertrags bzw. des Benchmarkertrags statistisch geschätzt werden können.

2 Zweck des Tracking Errors

Der *Tracking Error* soll ein Maß dafür sein, wie „gut“ ein Fonds seiner Benchmark folgt. Der nächstliegende Ansatz wäre, einfach den (mittleren) Abstand des Portfolioreturns vom Benchmarkreturn zu betrachten. Die klassischen, in der Literatur gängigen Definitionen des Tracking Errors folgen im wesentlichen diesem Ansatz (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3). Allerdings ist der mittlere Abstand eine symmetrische Meßgröße; d.h., er bewertet folgendes gleich:

1. Über– und Unterperformance des Fonds gegenüber der Benchmark;
2. Schwankungen des Fondsreturns um eine „stabile“ Benchmark und Schwankungen des Benchmarkreturns um einen „stabilen“ Fonds.

Wünschenswert wäre hingegen:

1. Eine anhaltende Underperformance des Fonds gegenüber der Benchmark sollte einen schlechten Tracking Error ergeben;

2. Auch wenn der Fondsertrag stark um die Benchmark schwankt, sollte das durch einen schlechten Tracking Error wiedergegeben werden;

3. Umgekehrt würde man vom Fonds erwarten, daß er nicht alle Schwankungen der Benchmark mitmacht, wenn diese sehr volatil ist.

Die meisten Definitionen des Tracking Errors etablieren symmetrische Risikomaße und erfüllen daher Forderung 1 nicht: In der Praxis sind diese Risikomaße jedoch so gut eingeführt, daß man sie nicht außer acht lassen kann — sie sollten aber jedenfalls durch Kenngrößen ergänzt werden, die Über- oder Unteperformance anzeigen (z.B. die Information Ratio).

3 Verschiedene Definitionen des Tracking Errors

3.1 Allgemeine Definitionen

Angenommen, es stehen n tägliche Kurse der Benchmark zur Verfügung:

$$V_{B,1}, V_{B,2}, \dots, V_{B,n}; \tag{1}$$

und analog n tägliche Kurse des Fonds:

$$V_{P,1}, V_{P,2}, \dots, V_{P,n}. \tag{2}$$

Die entsprechenden kontinuierlichen (täglichen) Returns $r_{B,i}$ bzw. $r_{P,i}$ sind dann jeweils über

$$V_{B,i} e^{r_{B,i}} = V_{B,i+1} \text{ und } V_{P,i} e^{r_{P,i}} = V_{P,i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

definiert.

3.2 Der nicht zentrierte Tracking Error

Definition 1 **(TE^1).**

$$TE^1 := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_{P,i} - r_{B,i})^2}{n-1}}. \tag{4}$$

Das Quadrat von TE^1 ist also der Schätzer von $\mathbb{E}[r_M^2]$, wobei $r_M := r_P - r_B$ der *aktive Ertrag* des Portfoliomanagers ist.

Eigenschaften.

1. Eine anhaltende Underperformance des Fonds gegenüber der Benchmark ergibt einen großen Tracking Error: Angenommen, $r_{B,i} - r_{P,i} > \alpha$ für eine positive Konstante $\alpha > 0$, dann ist der Tracking Error
$$TE^1 > \alpha\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{5}$$
Leider ergibt eine anhaltende Überperformance des Fonds gegenüber der Benchmark denselben Tracking Error, was TE^1 als *Risikomaß* für einen Benchmarktracker nicht sehr geeignet scheinen läßt.

2. Starke Schwankungen des Fondsertrages um den Benchmarkreturn ergeben einen großen Wert von TE^1;

3. Leider ergibt aber ein *glättender* Effekt des Fonds gegenüber der Benchmark, der bei stark volatiler Benchmark durchaus wünschenswert ist, ebenso einen großen Tracking Error.(Hierbei ist zu beachten, daß die Glättung des Portfolios zwar wünschenswert ist, im Allgemeinen jedoch zu größeren Spesen führen wird.)

3.3 Der Tracking Error als Erwartungswert der absoluten Differenz der Fondserträge von den Benchmarkerträgen

Definition 2 (TE^2).
$$TE^2 := \frac{\sum_{i=1}^{n} |r_{P,i} - r_{B,i}|}{n}. \tag{6}$$
Eigenschaften. Siehe Abschnitt 3.2.

3.4 Die residuale Tracking Error Standardabweichung

Definition 3 (TE^3).
$$TE^3 := \sigma(r_P)\sqrt{1 - \rho(r_P, r_B)^2}. \tag{7}$$
Eigenschaften.

1. Dieser Tracking Error kann eine anhaltende Underperformance des Portfolios gegenüber der Benchmark nicht von einer anhaltenden überperformance unterscheiden, da der Abstand von Portfolioreturn und Benchmarkreturn überhaupt nicht in die Definition eingeht.

2. Wenn der Portfolioreturn stark schwankt, dann ist $\sigma(r_P)$ groß. Wenn der Portfolioreturn r_P nur die Schwankungen des Benchmarkreturns r_B nachmacht, dann ist allerdings $\rho(r_P, r_B)$ nahe bei 1, was den Tracking Error klein macht. Problematisch ist aber der Fall (siehe **1.**), wo der Portfolioreturn wenig schwankt und negativ mit einer gut performenden Benchmark korreliert ist: dann erhält man einen kleinen Tracking Error, obwohl dieser Fall für den Portfoliomanager nicht erstrebenswert ist.

3. Wenn der Benchmarkreturn stark schwankt, der Portfolioreturn glatter ist, *im Mittel* jedoch dem Benchmarkreturn folgt, dann ist der Tracking Error klein.

Bemerkung. Die residuale Tracking Error Standardabweichung kommt in [1] und [2] vor.

3.5 Der zentrierte Tracking Error

Eine weitere Definition für einen Tracking Error wurde von Roll [4] eingeführt:

Definition 4 (TE^4).

$$TE^4 := s(r_M) = s(r_P - r_B), \tag{8}$$

wobei $s(.)$ die Stichprobenstandardabweichung ist. Dieser Tracking Error ist ein Maß für die unerwarteten Schwankungen des aktiven Ertrags.

Eigenschaften.

1. Eine anhaltende Überperformance und Underperformance tragen nicht zu diesem Tracking Error bei.

2. Starke unerwartete Schwankungen des Fondsertrages um den Benchmarkreturn ergeben einen großen Wert von TE^4, nicht jedoch solche Schwankungen, die anhaltend (also auch „im Mittel“) auftreten.

3. Ein *glättender* Effekt des Fonds gegenüber der Benchmark, der anhaltend (im Mittel) auftritt, ergibt einen kleinen Tracking Error.

Zusammenhang mit TE^1. Das Quadrat von TE^4 ist

$$(TE^4)^2 = \mathbb{E}[r_M^2] - \mathbb{E}[r_M]^2. \tag{9}$$

Der erste Term in (9) ist gerade das Quadrat von TE^1 (bzw. ist TE^1 der Schätzer für die Wurzel aus dem ersten Term). D.h., es gilt folgende Relation

$$(TE^4)^2 = (TE^1)^2 - \mathbb{E}[r_M]^2. \tag{10}$$

4 Der Tracking Error in verschiedenen Modellen

4.1 Modellunabhängige Betrachtungen

Man kann den Benchmarkreturn und den Portfolioreturn jeweils in die zwei Komponenten *erwarteter Return* und *unerwarteter Return* aufspalten

$$r_B = \mathbb{E}[r_B] + \epsilon_B \tag{11}$$
$$r_P = \mathbb{E}[r_P] + \epsilon_P, \tag{12}$$

wobei $\mathbb{E}[\epsilon_B] = \mathbb{E}[\epsilon_P] = 0$. Dann läßt sich der Ertrag des Managers, $r_M = r_P - r_B$, folgendermaßen zerlegen

$$r_M = \mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B] + (\epsilon_P - \epsilon_B). \tag{13}$$

Daraus ergibt sich leicht für das 2. Moment von r_M

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[r_M^2] \\
= \; & \mathbb{E}[(\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B] + (\epsilon_P - \epsilon_B))^2] \\
= \; & \mathbb{E}[(\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B])^2] + 2(\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B]) \underbrace{\mathbb{E}[\epsilon_P - \epsilon_B]}_{=0} + \mathbb{E}[(\epsilon_P - \epsilon_B)^2] \\
= \; & (\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B])^2 + \underbrace{\mathbb{E}[\epsilon_P^2]}_{\sigma_P^2} + \underbrace{\mathbb{E}[\epsilon_B^2]}_{\sigma_B^2} - \underbrace{2\mathbb{E}[\epsilon_P \epsilon_B]}_{2Cov[r_P, r_B]} \\
= \; & (\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B])^2 + \sigma_P^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_P \sigma_B \rho.
\end{aligned} \tag{14}$$

Das erste Quadrat in (14) ist die *erwartete Tracking Error Varianz*, während der Rest*zufällige Tracking Error Varianz* genannt wird (siehe [1], Gleichung (5)).

Der Tracking Error TE^1 ist ein Schätzer für das 2. Moment von r_M. Der Tracking Error TE^2 ist ein Schätzer für die Wurzel aus der erwarteten Tracking Error Varianz. TE^4 ist ein Schätzer für $\mathbb{E}[(r_M - \mathbb{E}[r_M])^2] = \mathbb{E}[(\epsilon_P - \epsilon_B)^2]$. Gleichung (14) läßt sich mit Hilfe der Tracking Errors schreiben als

$$\begin{aligned}
(TE^1)^2 &= (TE^2)^2 + (TE^4)^2 \\
&= \mathbb{E}[r_M]^2 + (TE^4),
\end{aligned} \tag{15}$$

was nur eine Umformung von Gleichung (10) ist.

4.2 Lineare Regression

Unter der Annahme, daß der Portfolioreturn eine lineare Funktion des Benchmarkreturns ist, kann man folgenden Ansatz machen:

$$r_P = \alpha + \beta r_B + \epsilon, \tag{16}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\epsilon] = 0$ und $\mathbb{E}[\epsilon r_B] = 0$. Wenn man α und β mit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Zeitreihen des Portfolioreturns und des Benchmarkreturns schätzt, dann erhält man

$$\alpha = \mathbb{E}[r_P] - \alpha\mathbb{E}[r_B] = \mathbb{E}[r_P] - Cov[r_P, r_B]\frac{\mathbb{E}[r_B]}{Var[r_B]} \tag{17}$$

und

$$\beta = \frac{Cov[r_P, r_B]}{Var[r_B]}. \tag{18}$$

Die Summe der quadratischen Abweichungen, die man mit diesem α und β erhält, ist

$$\sigma_P^2(1 - \rho^2), \tag{19}$$

das ist also genau das Quadrat von TE[3].

Es ist zweifelhaft, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Portfolio– und Benchmarkreturn sinnvoll unterstellt werden darf. Ein erster Anhaltspunkt ist ein Scatterplot dieser beiden Returns, anhand dessen man sich ein Bild machen kann. Wenn man α und β aus den Zeitreihen geschätzt hat, dann kann man auch (ex post) folgende Zeitreihe betrachten, um sich ein Bild über die Güte der linearen Approximation zu machen:

$$\frac{r_{P,i} - \alpha - \beta r_{B,i}}{r_{P,i}}. \tag{20}$$

Diese relativen Fehlerterme sollten für ein aussagekräftiges Modell klein sein. Ein weiteres Maß für die Güte der Approximation ist

$$R^2 := 1 - \frac{Var[\epsilon]}{Var[r_B]}. \tag{21}$$

Für die Anwendung der linearen Regression spricht jedoch, daß diese Begriffsbildung (Beta–Faktor) in der Analyse von Einzelaktien in bezug auf den entsprechenden Aktienindex wohl eingeführt ist (und zum Beispiel in der Risikomessung gerne verwendet wird, um Positionen in Einzeltiteln als synthetische Indexpositionen darzustellen).

5 Schlußfolgerung

Sämtliche betrachteten Meßgrößen lassen sich aus folgenden Grundgrößen ermitteln:

- Den Erwartungswerten von Benchmark– und Portfolioreturn,
- Den Varianzen bzw. Standardabweichungen von Benchmark– und Portfolioreturn,
- Der Kovarianz bzw. Korrelation von Benchmark– und Portfolioreturn.

Ebenso lassen sich die *Information Ratio IR* und die *Sharpe Ratio SR* auf diese Grundgrößen zurückführen:

$$SR = \frac{\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B]}{\sigma(r_P)}, \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned} IR &= \frac{\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B]}{\sigma(r_P - r_B)} \\ &= \frac{\mathbb{E}[r_P] - \mathbb{E}[r_B]}{\sqrt{\sigma(r_P)^2 + \sigma(r_B)^2 - 2\rho\sigma(r_P)\sigma(r_B)}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Statt diese Grundgrößen mehr oder weniger phantasievoll zu kombinieren, kann man sie einfach direkt betrachten und interpretieren:

- Die Erwartungswerte von Portfolio- und Benchmarkreturn zeigen direkt an, ob das Portfolio die Benchmark über– oder underperformt.
- Die Varianz des Portfolioreturns sollte die Varianz des Benchmarkreturns nicht zu stark übersteigen.
- Die Korrelation zwischen Portfolio– und Benchmarkreturn sollte (ausgehend von der der Annahme, daß die Benchmark eine gute Performance hat) groß (i.e., nahe bei 1) sein.

5.1 „Tracking–Error at Risk“

Eine weitere, direkte und naheliegende Meßgröße wäre ein Quantil der Verteilung der Differenzen $r_P - r_B$ (also quasi ein Analogon zum Value–at–Risk, wie er in der Risikomessung verwendet wird): Für eine plausible Schätzung eines 5%–Quantils müßte man z.B. 500 gemessene Differenzen $r_{P,i} - r_{B,i}$ aufsteigend sortieren und dann den 25. Wert γ aufsuchen. Die Interpretation dieses Wertes γ ist dann sehr einfach und intuitiv: Nur mit 5% Wahrscheinlichkeit liegt der Portfolioreturn r_P unterhalb von $r_B - \alpha$.

Literatur

[1] M. Ammann and J. Tobler, *Measurement and Decomposition of Tracking Error Variance*, June 2000 Discussion paper no. 2000–11, St. Gallen.

[2] M. Ammann and H. Zimmermann, *The Relation between Tracking Error and Tactical Asset Allocation*, March 2001, Preprint.

[3] *Handout*, Dipl.Ing. Friedrich Moser, 2000.

[4] R. Roll, *A Mean/Variance Analysis of Tracking Error*, Journal of Portfolio Management, 1992.

[5] B.L. van der Waerden, *Mathematical Statistics*, Springer Verlag, 1969.

[6] D. Williams, *Weighing the Odds: A Course in Probability and Statistics*, Cambridge University Press, 2002.