Ertrag und Risiko bei Portfolios und Benchmarks

M. Fulmek, J. Gaier, C. Summer

20. Juli 2001

1 Einleitung

Im Folgenden werden in der Hauptsache folgende Punkte untersucht:

1. die Abhängigkeit des erwarteten Returns bzw. der Volatilität von der Wahl des Zeitfensters (täglich, wöchentlich, monatlich, etc.), insbesondere woher diese kommt, und wie man sie gering hält (Glättungsverfahren) (vgl. Abschnitt 4),

2. wie man *konsistent* mit kontinuierlichen Returns (die genaue Bedeutung dieses Begriffes wird im Folgenden erklärt) alle notwendigen Berechnungen durchführt. Dabei wird auch erläutert, wann und wieso man mit dem arithmetischen Mittel oder dem geometrischen Mittel rechnet. Kurz zusammengefaßt sollte man für die kontinuierlichen Returns *immer* das arithmetische Mittel verwenden,

- da dieses eine klar definierte statistische Interpretation besitzt (vgl. Abschnitt 2).
- da alle Rechnungen, die man mit den kontinuierlichen Returns durchführt, schlußendlich in Resultate für lineare Returns umgerechnet werden können (vgl. Abschnitt 5).

Die für die Untersuchung nötigen Berechnungen wurden alle mit der Software Mathematica der Firma WOLFRAM Media durchgeführt und liegen als Anhang bei. Die wichtigsten Graphiken wurden in diesen Text übernommen. Eine Gratisdokumentation für Mathematica und nähere Informationen kann man unter `http://www.wolfram.com` im Internet finden.

2 Das arithmetische Mittel als erwartungstreuer Schätzer

Wir folgen hier in der Darstellung dem Buch *Mathematical Statistics* von B.L. van der Waerden. Angenommen, wir haben eine Stichprobe *einer* zufällig verteilten

Größe, die n Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ umfaßt. Es haben dann naturgemäß alle x_i die gleiche Verteilung. Nun bilden wir das *arithmetische Mittel* der n Werte $x_1, \ldots, x_n$

$$M := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

und nennen dieses das *Stichprobenmittel*. Angenommen, der Mittelwert der den x_i zugrunde liegenden Verteilung hat den Wert μ. Dann ist der Erwartungswert von M

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[x_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu = \mu. \tag{2}$$

Das heißt, daß M den gleichen Mittelwert wie die x_i hat. (Bitte zu beachten, daß die Verteilung von M selbstverständlich i.A. nicht gleich der den x_i zugrunde liegenden Verteilung ist.) Die Varianz von M, σ_M, ist aber durch die Varianz der x_i, σ, folgendermaßen gegeben

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{3}$$

Das heißt wiederum, daß die quadratische Abweichung von M von seinem Mittelwert μ um einen Faktor n kleiner ist als die quadratische Abweichung der x_i von ihrem Mittel μ. Daher ist das arithmetische Mittel einer Stichprobe ein guter Schätzer für den Erwartungswert.

Analog erhält man, daß

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2} \tag{4}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ ist.

3 Konkrete Vorgangsweise bei gegebener Fondswertentwicklung

Wir haben eine Zeitreihe von täglichen Schlußkursen des Fondswertes (bereinigt) vorliegen, die $n+1$ Werte $V_0, \ldots, V_n$ umfaßt. Wir definieren nun die *kontinuierlichen täglichen Returns* r_i über folgende Gleichung

$$V_{i+1} = V_i e^{r_i}. \tag{5}$$

Dann erhalten wir mit

$$r_i := \ln \frac{V_{i+1}}{V_i} \tag{6}$$

die Zeitreihe der Returns. Wenn man nun das arithmetische Mittel aus der Zeitreihe $r_0, \ldots, r_{n-1}$ errechnet

$$\overline{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{V_{i+1}}{V_i} = \frac{1}{n} \ln \frac{V_n}{V_0}, \tag{7}$$

dann erhält man nach Abschnitt 2 den erwartungstreuen Schätzer für den gemeinsamen Mittelwert der r_i, also für den erwarteten täglichen Return. Analog berechnet man die Standardabweichung der r_i. Es ist zu beachten, daß die Standardabweichung der kontinuierlichen Returns genau mit dem übereinstimmt, was man i.A. mit *Volatilität* bezeichnet (vgl. Hull, S. 241 ff.).

Analog verfährt man mit den Returns der Benchmark und dem *Active Return*, der folgendermaßen definiert ist

$$r_{Active} = r_{Fonds} - r_{Benchmark}. \tag{8}$$

Auch hier macht sich ein angenehmer Nebeneffekt der kontinuierlichen Returns bemerkbar: (8) gilt für diese exakt wegen

$$e^{r_{Active}} e^{r_{Benchmark}} = e^{r_{Fonds}} \Rightarrow (8). \tag{9}$$

4 Unterschiedliche Methoden zur Berechnung des mittleren Returns über einen längeren Zeithorizont

Wie gehen wir nun vor, wenn wir den mittleren *jährlichen* Return des Fonds' berechnen wollen? (Das Jahr soll im Folgenden immer aus 250 Tagen bestehen.)

Hier gibt es prinzipiell zwei Vorgangsweisen:

1. Vorgangsweise Man betrachtet die Zeitreihe der jährlichen (kontinuierlichen) Returns von einem gewissen Startzeitpunkt aus, also z.B.

$$r_1 = \ln \frac{V_{250}}{V_0} \tag{10}$$

$$r_2 = \ln \frac{V_{500}}{V_{250}} \tag{11}$$

$$\vdots \tag{12}$$

$$r_m = \ln \frac{V_{m\cdot 250}}{V_{(m-1)\cdot 250}}, \tag{13}$$

wobei genau $n + 1 = m \cdot 250 + 1$ Fondswerte vorliegen, und geht genauso vor wie in Abschnitt 3. In einem gewissen Sinn verleugnet man bei diesem Vorgehen, daß man eine Zeitreihe *täglicher* Returns vorliegen hat, und vernachlässigt dementsprechend viel der tatsächlich vorliegenden Information.

Die nachfolgende Graphik zeigt die annualisierten erwarteten Returns für den Fonds und die Benchmark und den Active Return für verschiedene Zeithorizonte von einem bis zu 60 Tagen. Man sieht (an den Unregelmäßigkeiten der Kurve), daß man je nach Größe des Zeitfensters sehr verschiedene Werte erhält.

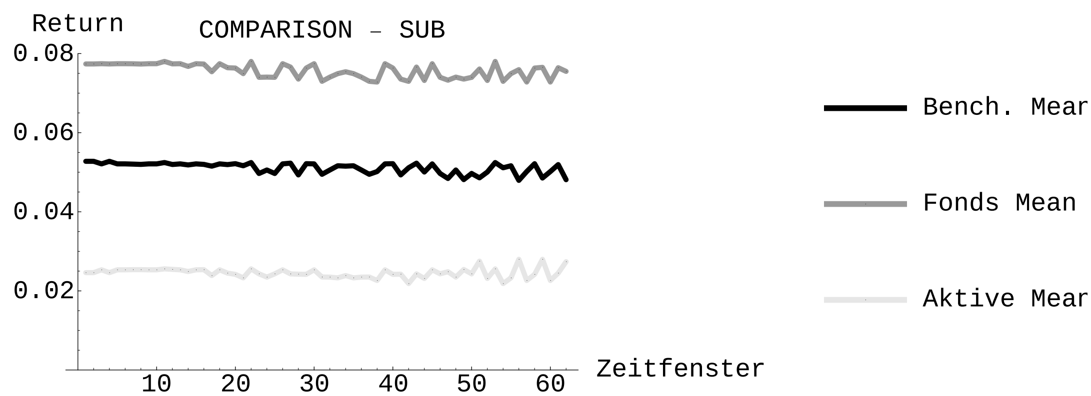

Abbildung 1: Kontinuierliche Returns für verschiedene Zeitspannen nach der 1. Vorgangsweise (annualisiert)

2. Vorgangsweise Man betrachtet die Zeitreihe der jährlichen (kontinuierlichen) Returns, diesmal aber nicht von *einem* fixen (beliebig gewählten) Zeitpunkt aus, sondern von allen möglichen Startzeitpunkten

$$r_0 = \ln \frac{V_{250}}{V_0} \tag{14}$$

$$r_1 = \ln \frac{V_{251}}{V_1} \tag{15}$$

$$r_2 = \ln \frac{V_{252}}{V_2} \tag{16}$$

$$\vdots \tag{17}$$

$$r_{(m-1)250-2} = \ln \frac{V_{m\cdot 250-1}}{V_{(m-1)\cdot 250-1}} \tag{18}$$

$$r_{(m-1)250-1} = \ln \frac{V_{m\cdot 250}}{V_{(m-1)\cdot 250}}. \tag{19}$$

Man erhält so natürlich eine wesentlich umfangreichere Zeitreihe als mit der 1. Vorgangsweise.

Mit dieser kann man nun wieder verfahren wie in Abschnitt 3 und erhält wieder einen erwarteten jährlichen (kontinuierlichen) Return.

Abbildung 2 zeigt den annualiserten erwarteten Return für den Fonds und die Benchmark und den aktiven Return für verschiedene Zeithorizonte. Man sieht, daß die so erhaltenen Kurven wesentlich glatter sind, als die in Abbildung 1 dargestellten, mit der 1. Vorgangsweise ermittelten Kurven.

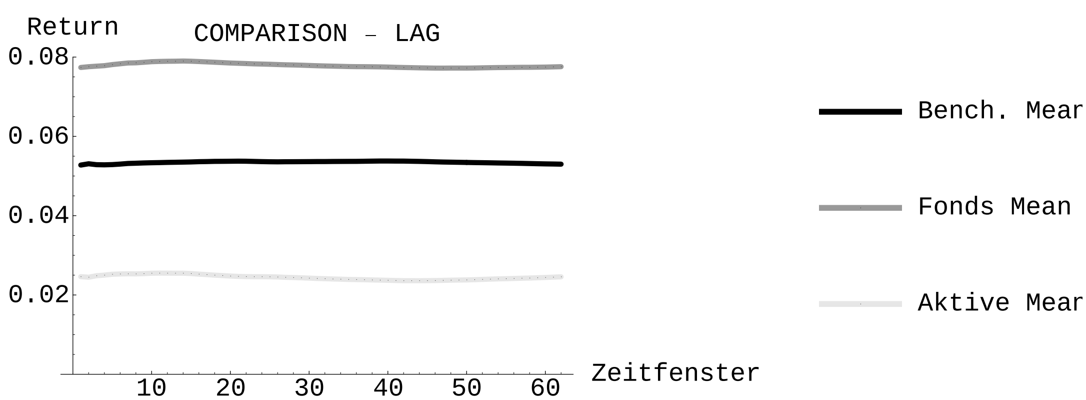

Abbildung 2: Kontinuierliche Returns für verschiedene Zeitspannen nach der 2. Vorgangsweise (annualisiert)

Interpretation: Gewissermaßen mittelt man bei der zweiten Vorgangsweise über eine Zeitreihe, die man mit der Methode der 1. Vorgehensweise erhält. Man sieht das auch schön an den konkreten Daten: Wenn man nach beiden Methoden z.B. den wöchentlichen, monatlichen, vierteljährlichen, halbjährlichen Return ausrechnet und annualisiert, dann weichen die jeweiligen Werte für die 1. Vorgangsweise untereinander wesentlich stärker ab als die Werte für die 2. Vorgangsweise. Das

leuchtet ein, da die Wahl der Daten, die man bei der 1. Methode vernachlässigt, vollkommen willkürlich ist.
(Am Beispiel *wöchentlicher Returns*: Man rechnet bei der 1. Vorgehensweise sozusagen einen Montag auf Montag–, Dienstag auf Dienstag–, ..., Freitag auf Freitag–Return aus. Wenn man nicht aus einem besonderen Grund ein besonderes Interesse für einen dieser Wochentage hat, dann ist die Wahl *eines* dieser Wochentage nicht zu rechtfertigen. Methode 2 hingegen mittelt zur Bestimmung des wöchentlichen Returns über alle Wochentage.)

5 Über andere Formeln, die man in der Literatur findet, und deren Sinn

5.1 Erträge

Zuerst einmal muß festgestellt werden, daß man selbstverständlich jede Rechnung, die man mit kontinuierlichen Returns durchführen kann, auch mit linearen Returns durchführen kann. I.e., für ein bestimmtes r_t (nicht annualisiert, daher geht die Zeit t nicht mit $r_t t$ ein) läßt sich

$$V_t = V_0 e^r \tag{20}$$

immer auch als

$$V_t = V_0(1 + \tilde{r}) \tag{21}$$

für ein $\tilde{r}$ schreiben (ebenfalls nicht annualisert). Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen kontinuierlichen und linearen Returns

$$\tilde{r} = e^r - 1 = (1 + r + \frac{r^2}{2!} + \dots) - 1 = r + (\frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \dots) > r, \tag{22}$$

respektive

$$r = \ln(1 + \tilde{r}t). \tag{23}$$

Aus (22) folgt insbesondere, daß die linearen Returns immer größer sind als die entsprechenden kontinuierlichen Returns. Das hat nur eine Bedeutung, wenn man - wie weiter unten erläutert - die kontinuierlichen Returns für kleine Zeitspannen durch die linearen Returns approximiert.

Man sieht jedenfalls, daß man aus der Zeitreihe der täglichen kontinuierlichen Returns problemlos eine Zeitreihe der täglichen linearen Returns ausrechnen kann und umgekehrt.

Rechnen wir das arithmetische Mittel der (nicht annualisierten) kontinuierlichen täglichen Returns aus

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(1+\tilde{r}_j) = \ln \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1+\tilde{r}_j)}, \tag{24}$$

so entspricht das - wie wir sehen - dem Logarithmus des *geometrischen* Mittels der Aufzinsungsfaktoren zu den linearen Returns.
Aber: Die schöne Interpretation des arithmetischen Mittels als erwartungstreuer Schätzer, läßt sich nur eins zu eins auf das geometrische Mittel und die Stichprobe der Aufzinsungsfaktoren zu den linearen Returns übersetzen. Das geometrische Mittel an sich besitzt *keine* eigenständige Interpretation als Schätzer.

Zusammengefaßt würden wir anraten, *immer* mit kontinuierlichen Zinsen zu rechnen. Man kann die *Endergebnisse* immer einfach in Aussagen für lineare Returns umrechnen, wenn das aus Formgründen erwünscht ist. Wichtig ist in jedem Fall *Konsistenz*: „It does indicate that consistency is important, to make sure we are not comparing apples and oranges.“ ([1], S. 484, Kopie liegt bei.)

Es muß aber folgendes angemerkt werden: Für sehr kleine Werte von x gilt

$$e^x \simeq 1 + x, \tag{25}$$

d.h. daß über sehr kleine Zeithorizonte (wie z.B. einen Tag) die linearen Zinsen und die kontinuierlichen nicht sehr stark voneinander abweichen. In der Literatur (z.B. Ibbotson, tendenziell auch Hull) findet man häufig Aussagen wie, daß für *kurze* Zeithorizonte das *arithmetische* Mittel für den erwarteten Return zu nehmen ist, während für *lange* Horizonte besser der Logarithmus des *geometrischen* Mittels der Aufzinsungsfaktoren anzuwenden ist. Diese Aussage ist also auf *lineare* Returns zu beziehen und nur eine Näherung dafür, daß man mit *kontinuierlichen* Zinsen *immer* mit dem arithmetischen Mittel rechnet.

5.2 Volatilitäten etc.

Zuerst einmal ein Zitat aus dem Buch von Hull (eine Kopie der entsprechenden Stelle liegt bei): „*From equation (11.7), the volatility of a stock price can be defined as the standard deviation of the return provided by the stock in one year when the return is expressed using* **continuous compounding**.“ Das heißt: die Volatilität ist *definiert* als die Standardabweichung der kontinuierlichen Returns und hat in diesem Sinne mit den linearen Returns nichts zu tun! (Außer daß man natürlich sagen könnte, daß die Volatilität die Standardabweichung der logarithmierten Aufzinsungsfaktoren ist, was aber nur eine komplizierte Reformulierung des oben gesagten ist.) D.h. für die Errechung der Volatilitäten sind per definitionem die kontinuierlichen Erträge zu verwenden.

Der *Tracking Error* ist definiert als die Standardabweichung des aktiven Returns. Diese Definition ist aber für die konkrete Berechnung des Tracking Errors ungenügend, da sie nicht vorschreibt, aus **welchen** (kontinuierlich, linear?) Returns die Standardabweichung zu ermitteln ist. Nun ist aber in der uns bekannten Literatur der aktive Return als *Differenz* von Portfolio- und Benchmarkreturn definiert und diese Relation gilt nur im kontinuierlichen Setting exakt (siehe [1], S. 49).

Wenn man nun aber den Tracking Error als Standardabweichung des aktiven Returns, berechnet als Differenz der linearen Returns von Portfolio und Benchmark, definiert, dann gibt es keine **einfache** Umrechnungsformel zwischen Standardabweichung der kontinuierlichen Erträge und der Standardabweichung der linearen Erträge.

5.3 Sharpe Ratio

Die Sharpe Ratio ist definiert als der Quotient von aktivem Ertrag und Standardabweichung des Portfolioreturns. Wir wissen nicht, wie diese Definition von Sharpe ursprünglich gemeint war, d.h., ob man kontinuierliche oder lineare Returns zur Berechnung verwenden soll. Fest steht aber, daß die Annahme der Normalverteilung der Returns, wie sie dem CAPM-Modell zugrunde liegt, besser mit kontinuierlichen Zinsen als mit linearen Zinsen vereinbar ist, da es in letzerem Fall zu negativen Portfoliowerten kommen kann.

$$V_t = V_0(1 + r_t) < 0$$

für $r_t < -1$, was für normalverteiltes r_t mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt.

6 Das Black-Scholes-Modell

Als Beispiel für ein Modell für die Fondsreturns, das die Voraussetzung von Abschnitt 2 und Abschnitt 3 erfüllt, nämlich daß die kontinuierlichen (täglichen) Returns unabhängig vom Datum i.i.d. verteilt sind, soll hier das sog. „Black-Scholes-Modell“ gebracht werden. Hier geht man von folgender stochastischer Differentialgleichung für den Prozess des volumsbereinigten Fondswertes aus

$$\mathrm{d}V_t = \mu V_t \mathrm{d}t + \sigma V_t \mathrm{d}W_t, \tag{26}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ eine relle Konstante und $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Konstante sind. W_t ist eine Standard-Brownsche Bewegung. Das Bild, das man vor Augen haben sollte, ist, daß der Wertprozess im Mittel der Exponentialfunktion $e^{\mu t}$ folgt, aber von einem zufälligen „weißen Rauschen“ gestört wird. Es folgt dann (mit

Hilfe des Itôschen Lemmas), daß der logarithmierte Wertprozess eine Brownsche Bewegung mit Drift ist

$$\mathrm{d}\ln V_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{27}$$

Insbesondere gilt, daß die Differenzen der logarithmierten Werte $\ln V_t$, $\ln V_{t+\tau}$ zu verschiedenen Zeiten $t, t+\tau$ normalverteilt sind

$$\ln V_{t+\tau} - \ln V_t \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma\sqrt{\tau}). \tag{28}$$

Man kann aus Fondswerten kontinuierliche Erträge berechnen

$$V_t e^{r_\tau \tau} = V_{t+\tau}, \tag{29}$$

woraus folgt, daß die kontinuierlichen Erträge gegeben sind durch

$$r_\tau = \frac{\ln V_{t+\tau} - \ln V_t}{\tau}. \tag{30}$$

Mit Hilfe von (28) sieht man leicht, daß für die kontinuierlichen Erträge gilt

$$r_\tau \tau \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma\sqrt{\tau}), \tag{31}$$

oder

$$r_\tau \sim N(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}). \tag{32}$$

Also sind die erwarteten Returns über eine gewissen Zeitspanne τ nur von der Länge dieser Zeitspanne abhängig, nicht aber von deren Start- oder Endpunkt.

Was ist nun die Bedeutung des Parameters μ, der in all den Formeln oben auftaucht? In der Literatur findet man den Namen „Expected Return“. Dieser Name rechtfertigt sich dadurch, daß folgendes gilt (ein einfaches Lemma aus der Formel für die erzeugende Funktion einer normalverteilten Zufallsvariable):

$$\mathbb{E}_t[V_{t+\tau}] = \mathbb{E}_t[e^{\ln V_{t+\tau}}] = V_t e^{\mu\tau}. \tag{33}$$

Aus (32) sieht man aber, daß der Erwartungswert der kontinuierlichen Erträge immer gleich $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ ist und nicht gleich μ.

$$V_t e^{\mu\tau} = \mathbb{E}_t[V_{t+\tau}] \neq V_t e^{\mathbb{E}_t[r_\tau]\tau} = V_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau}. \tag{34}$$

Hier zeigt sich, warum der Begriff „Expected Return“ für zwei verschiedene Dinge verwendet wird: μ im Sinne von (33), und $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, wenn man von (32) ausgeht.

Es läßt sich wieder folgendermaßen argumentieren (vgl. Abschnitt 5): für kurze Zeithorizonte t, wo man $\ln V_t$ gut durch $1 + V_t$ approximieren kann, ist μ der erwartete Return, während für lange Zeithorizonte eine volatitätsabhängige Korrektur vorgenommen werden muß. (Vgl. Ibbotson, S. 100: *For a non-constant series the difference between the arithmetic and the geometric mean is positively related to the variability or standard deviation of the returns.* Das sieht man im Black-Scholes Modell wirklich hervorragend.)

7 Der Tracking Error und seine Abhängigkeit von der zugrunde gelegten Zeitperiode

Der Tracking Error ist als Standardabweichung des aktiven Returns definiert. Das heißt, daß für die Berechnung des Tracking Errors analog wie für die Berechnung des erwarteten Returns für eine bestimmte Zeitspanne zwei mögliche Vorgangsweisen bestehen (vgl. Abschnitt 4).

Wieder gibt es bei der 1. Vorgangsweise große Abweichungen z.B. der täglichen, wöchentlichen, monatlichen, ... Volatilität sowohl voneinander wie auch untereinander, während die Abweichungen bei der 2. Vorgangsweise vergleichsweise gering sind.

Die nachfolgenden Abbildungen sollen das veranschaulichen. Die ersten beiden Graphiken (Abbildungen 3 und 4) zeigen die annualisierten Volatilitäten für Fonds, Benchmark und Active Return (also den Tracking Error) in Abhängigkeit vom zugrunde gelegten Zeitfenster, berechnet nach der 1. Methode, und zwar für den Fonds 12 und den Fonds 27.

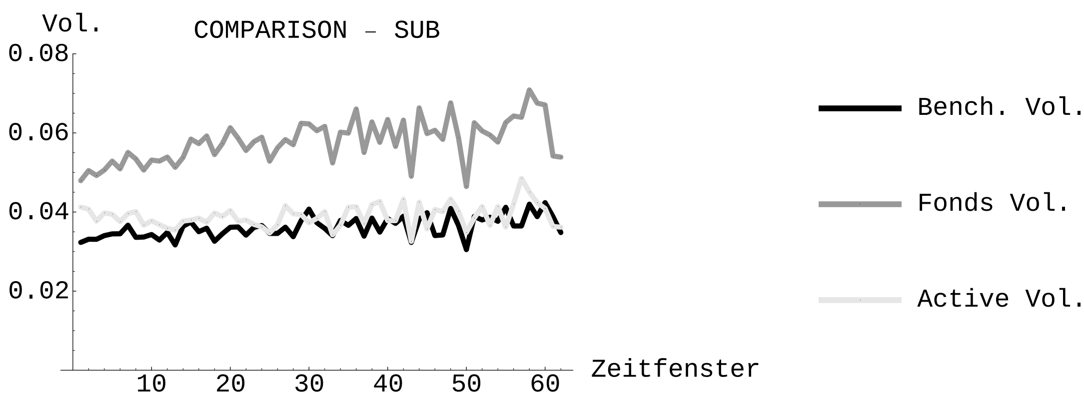

Abbildung 3: Volatilitäten für verschiedene Zeitspannen nach der 1. Vorgangsweise, Fonds 12

Abbildungen 5 und 6 zeigen dasselbe, aber diesmal berechnet nach der 2. Methode.

Bemerkung und Ausblick: Man sieht in Abbildungen 5 und 6, daß der Tracking

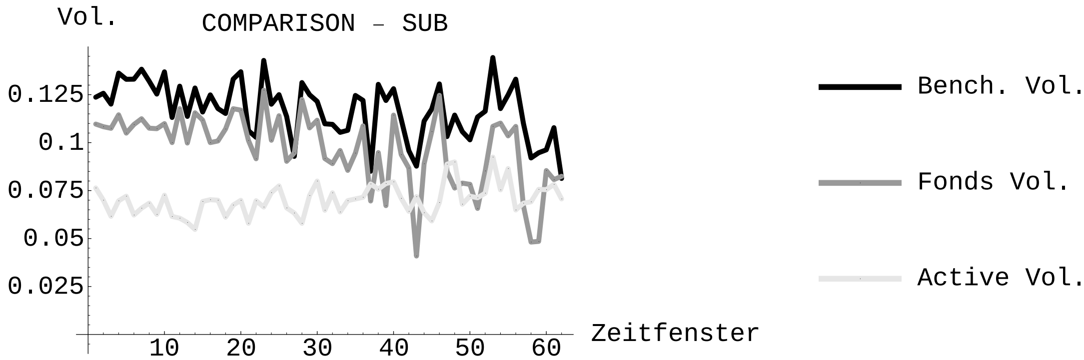

Abbildung 4: Volatilitäten für verschiedene Zeitspannen nach der 1. Vorgangsweise, Fonds 27

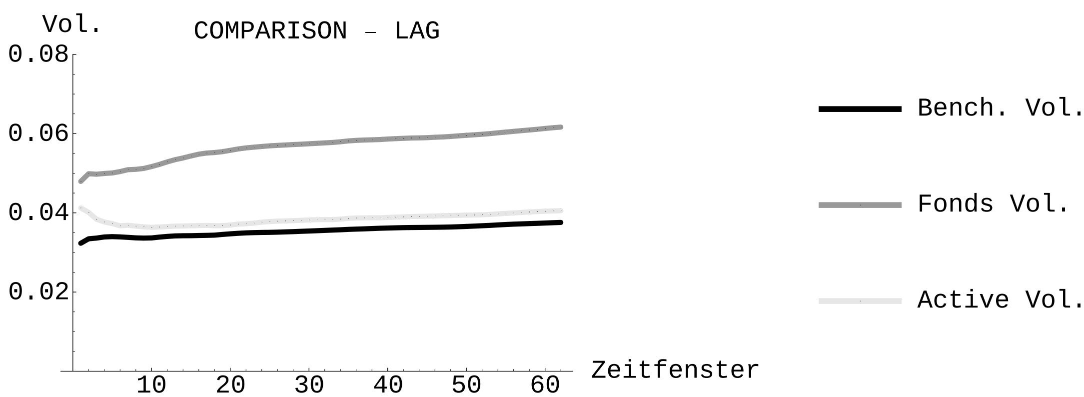

Abbildung 5: Volatilitäten für verschiedene Zeitspannen nach der 2. Vorgangsweise, Fonds 12

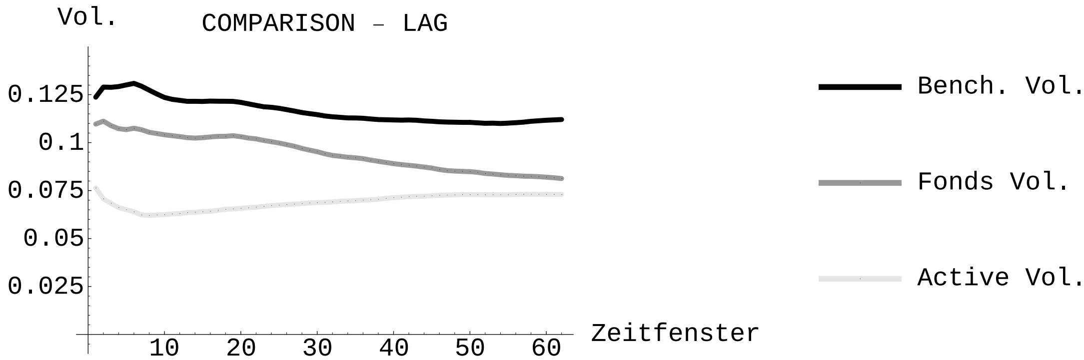

Abbildung 6: Volatilitäten für verschiedene Zeitspannen nach der 2. Vorgangsweise, Fonds 27

Error bei einem Fenster von 5 bis 10 Tagen ein Minimum annimmt. Das läßt darauf schließen, daß als „Risikomaß“ entsprechend ein 5 bis 10 Tage-Moving Average ein guter Ansatz wäre. Eine genaue Untersuchung könnte sich hier anschließen.

Literatur

[1] Richard C. Grinold, Ronald N. Kahn, *Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1999.

[2] John C. Hull, *Options, Futures and other Derivatives*, 4th Edition, Prentice Hall, 2000.

[3] *Stocks, Bonds, Bills and Inflation, 2001 Yearbook: Market Results for 1926-2000*, IbbotsonAssociates, 2001.

[4] *Handout*, Dipl.Ing. Friedrich Moser, 2000.

[5] B.L. van der Waerden, *Mathematical Statistics*, Springer Verlag, 1969.